Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ

22/11/2016

15ο μάθημα

Συνέχεια της απόδειξης από χθες:

$f: U \to \mathbb{R}$ μερικώς διαφορίσιμη στο U και η ~~grad~~

$\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right) : U \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχής στο

$\bar{x} \Rightarrow f$ διαφορίσιμη στο $\bar{x}$.

Είχαμε ορίσει τα διανύσματα $\bar{y}^{(k)} := \bar{x} + (u_1, u_2, \dots, u_k, 0, \dots, 0)$ όπου $\bar{u} = (u_1, \dots, u_n)$ και $k = 1, \dots, n$ και επίσης ορίσαμε ότι $\bar{y}^{(0)} := \bar{x}$ $\left(\Rightarrow \bar{y}^{(n)} = \bar{x} + \bar{u}\right)$

$$\Rightarrow f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)}) = f(\bar{y}^{(k-1)} + u_k \bar{e}_k) - f(\bar{y}^{(k-1)})$$

$$(=: g(u_k) - g(0) \overset{\text{ΘΜΤ}}{=} u_k\, g'(\underbrace{\vartheta_k u_k}_{=\xi_k}) \text{ με } \vartheta_k \in (0,1) =$$

$=\xi_k$ με ξ_k μεταξύ u_k και 0.

$$= u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k u_k \bar{e}_k)$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{n} \left(f(\bar{y}^{(k)}) - f(\bar{y}^{(k-1)})\right) = \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k u_k \bar{e}_k)$$

$$\Rightarrow f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \underbrace{\operatorname{grad} f(\bar{x}) \cdot \bar{u}}_{= \sum_{k=1}^{n} u_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})} = \sum_{k=1}^{n} u_k \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k u_k \bar{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})\right)$$

Υπενθύμιση:

f διαφ. στο x $\Leftrightarrow \displaystyle\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \operatorname{grad} f(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = 0$

$$\Rightarrow \left| f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x}) \cdot \bar{u} \right| \leq \|\bar{u}\| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{y}^{(k-1)} + \vartheta_k u_k \bar{e}_k) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right| \quad (*)$$

Όμως οι συναρτήσεις $\dfrac{\partial f}{\partial x_k} : U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο $\bar{x}$, έχουμε

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta) \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}+\bar{u}) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}) \right| < \frac{\varepsilon}{n}$$

Άρα $\|\bar{y}^{(k-1)} + \theta_k u_k \bar{e}_k - \bar{x}\| \leq \delta \quad \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta)$

έχουμε από την ⊛ $\dfrac{f(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - \nabla f(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} < \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$

<u>Πόρισμα:</u>

Έστω $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$ είναι C^1, δηλαδή συνεχώς (μερικώς) διαφορίσιμη στο ανοικτό $U \subset \mathbb{R}^n$. Τότε $\bar{f}$ διαφορίσιμη.

$$\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{\bar{f}(\bar{x}+\bar{u}) - f(\bar{x}) - J_{\bar{f}}(\bar{x})\bar{u}}{\|\bar{u}\|} = \bar{0}$$

$$J_{\bar{f}}(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \quad \text{όπου} \quad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \frac{f_j(\bar{x}+\bar{u}) - f_i(\bar{x}) - \nabla f_j(\bar{x}) \cdot \bar{u}}{\|\bar{u}\|} = 0$$

<u>Αλλιώς:</u> Μια διανυσματική συνάρτηση είναι διαφορική στο $\bar{x}$ $\Leftrightarrow$ Κάθε συνιστώσα της είναι διαφορική στο $\bar{x}$ (συνεχώς)(μερ. διαφ)

<u>Παρατήρηση:</u> Είχαμε ονομάσει μια $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό συνεχώς μερικώς διαφορική, αν $\exists\, J_{\bar{f}}(\bar{x}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ $\forall \bar{x} \in U$ και οι $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής $\forall j = 1, \dots, m$ και ότι

συνήθως το «μερικώς» δεν το λέμε.

Συμβολισμός $\bar{f} \in C^1(U : \mathbb{R}^m)$

Υπάρχει και η εξής έννοια για την f αυτή:

Η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό λέγεται συνεχώς διαφ. αν είναι διαφορίσιμη και η παράγωγος της $D\bar{f}: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$ είναι συνεχής.

Όπου μια συνάρτηση $A: U \to \mathbb{R}^{m \times n}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, λέγεται συνεχής αν είναι συνεχής σε κάθε $\bar{x} \in U$, δηλ. αν $\lim_{\bar{u} \to \bar{0}} \|A(\bar{x}+\bar{u}) - A\bar{x}\| = 0$, όπου για ένα $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ έχουμε

$\|B\|^2 = \|(b_{ji})_{\substack{1\le j\le m \\ 1\le i\le n}}\|^2 := \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}^2$, μια νόρμα στον χώρο των πινάκων. Άρα, $\bar{f}: U\to\mathbb{R}^m$ συνεχώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$

$\forall \bar{x}\in U \quad \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \| \underbrace{D\bar{f}(\bar{x}+\bar{u})}_{=J_{\bar{f}}(\bar{x}+\bar{u})} - \underbrace{D\bar{f}(\bar{x})}_{=J_{\bar{f}}(\bar{x})} \| = 0$

$\Leftrightarrow \forall \bar{x}\in U \quad \forall j=1,..,m \quad \forall i=1,..,n$

$$\lim_{\bar{u}\to\bar{0}} \left(\frac{\partial f_i(\bar{x}+\bar{u})}{\partial x_i} - \frac{\partial f_i(\bar{x})}{\partial x_i} \right) = 0$$

αφού $\|A(\bar{x}+\bar{u}) - A(\bar{x})\| \to 0$

$\Leftrightarrow \forall i=1,..,n \quad \forall j=1,..,m$

$\Leftrightarrow |a_{ji}(\bar{x}+\bar{u}) - a_{ji}(\bar{x})| \xrightarrow{\bar{u}\to\bar{0}} 0$

$\Uparrow$

$\bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U\to\mathbb{R}^m$ συνεχής στο $\bar{x}$.

Επομένως, $\forall \bar{x}\in U \quad \forall i=1,..,n \quad \forall j=1,..,m$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ συνεχής στο $\bar{x}$.

$\Leftrightarrow \forall i=1,..,n \quad \forall j=1,..,m \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_i} : U\to\mathbb{R}$ συνεχής.

$\Leftrightarrow \bar{f}\in C^1(U,\mathbb{R}^m)$

$\Leftrightarrow \bar{f}$ συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ: ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΔΙΑΦ., ΔΙΑΦΟΡ., ΜΕΡΙΚΩΣ ΔΙΑΦ., ΣΥΝΕΧΟΥΣ.

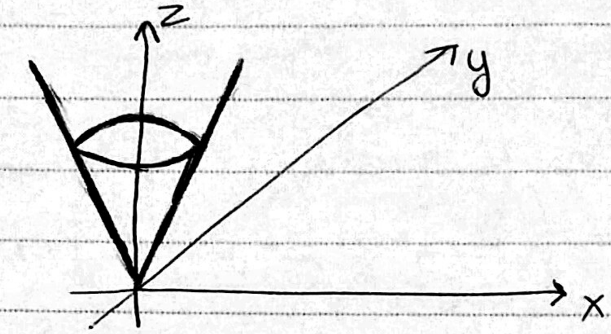
Έστω $\bar{f}: U\to\mathbb{R}^n$, $U\to\mathbb{R}^n$ ανοικτό. Τότε έχουμε $\bar{f}$ συνεχώς διαφορίσιμη $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη

① $\not\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $\bar{f}$ διαφορίσιμη

② $\not\Leftarrow$ $\Rightarrow$ $\left|\begin{array}{l} \bar{f} \text{ συνεχής} \\ \quad ③\ \Uparrow\ \not\Downarrow\ ④ \\ \bar{f} \text{ μερικώς διαφ.} \end{array}\right.$

Αν αυτά ισχύουν σε μία (οσοδήποτε μικρή) ανοικτή μπάλα με κέντρο $\bar{x} \in U$ (δηλ. για το περιορισμό της f στη μπάλα αυτή) λέμε ότι η f έχει τις πιο πάνω ιδιότητες «στο σημείο $\bar{x}$»

Αντιπαραδείγματα ①-④:



③ $f(x) = \|\bar{x}\|$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Είναι συνεχής αλλά όχι μερικώς διαφορίσιμη στο $\bar{O}$.

$\xrightarrow[\text{πρόταση}]{\text{βλέπε προηγ.}}$ όχι διαφορίσιμη $\Rightarrow$ όχι συνεχώς διαφ.

④ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

όχι συνεχής, αλλά μερικώς διαφ στο $(0,0)$

Αφού $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$

$\Rightarrow$ όχι διαφ. $\Rightarrow$ όχι συνεχώς διαφ.

② $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Είναι συνεχής στο $(0,0)$, μερικώς διαφ στο $(0,0)$ αλλά όχι διαφ.

Γιατί, η f συνεχής $|f(x,y)| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{*}{\leq} \dfrac{1}{2} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} =$

$= \|(x,y)\|$ και άρα $(x_\nu, y_\nu) \to (0,0) \Leftrightarrow \|(x_\nu, y_\nu)\| \to 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x_\nu, y_\nu)| \to 0$

f μερ. διαφ. $\left.\begin{array}{l} g_1'(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0 \\ g_1(x) = f(x,0) \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \ldots\ldots = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \nabla f(0,0) = (0,0)$

$*$ $2ab \leq a^2 + b^2$

f δεν είναι διαφ. στο $(0,0)$ αφού

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)(x,y)}{\|(x,y)\|} \neq 0$$

$$\iff \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \nexists \quad (\text{Βλέπε } ④)$$

① $f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$ αλλά όχι συνεχώς διαφορίσιμη

$\left(\text{δηλ. } \exists \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \text{ αλλά δεν είναι συνεχής στο } (0,0) \right)$

Γιατί, $\forall (x,y)\neq(0,0)$ δηλ. στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη ($f\in C^1(\mathbb{R}\setminus\{(0,0)\})$) αλλά δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$, με παράγωγο $Df(x,y) = \text{grand } f(x,y) =$

$$= \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) =$$

$$= \left(2x\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) =$$

$$= \left(2y\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$$

Η f είναι διαφ στο $(0,0)$.

αφού $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$ (Άσκηση)

και επίσης $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \cancel{f(0,0)}^{\to 0} - \cancel{\nabla f(0,0)(x,y)}^{\to 0}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \quad (\text{ως μηδενική επί φραγμένη})$$

Όμως, η $Df: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$D_f(x,y) = \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

όπου πιο πάνω για $(x,y) \neq (0,0)$ και $Df(0,0) = (0,0)$

Άρα δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

αφού οι $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\frac{\partial f}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δεν είναι συνεχείς στο $(0,0)$.

<u>πχ</u>

SOS $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} 2x \cdot \sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \nexists$ } ΑΣΚΗΣΗ

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>

Η άλγεβρα Ιακωβιανών πινάκων συνεπάγεται την αντίστοιχη άλγεβρα παραγώγων (α) – (γ).